Notes sur l'histoire des mathématiques.

Par

H.-G. Zeuthen.

(Présenté dans la séance du 13 janvier 1893.)

Un nouveau volume des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von Moritz Cantor* a paru en 1892. Il comprend l'espace de temps depuis l'an 1200 jusqu'à 1668.

L'apparition en 1880 du premier volume de cette œuvre avait donné le signal d'un très grand nombre de publications sur la partie de l'histoire des mathématiques dont elle traitait. Bien que ces publications, très différentes par leur provenance, eussent pour objets des rectifications de faits rapportés dans le livre de M. Cantor, ou bien d'explications données par le même auteur, ou du moins des suppléments à ses considérations, elles étaient autant de témoignages de la haute valeur du travail qu'il avait exécuté. En effet, c'était lui qui avait mis beaucoup d'auteurs en état de faire leurs nouvelles observations, et ceux d'entre eux qui avaient à communiquer le fruit de recherches plus indépendantes, pouvaient leur donner la juste place dans le tableau d'ensemble si complet et si véridique de toutes les questions de faits, tel que l'avait présenté M. Cantor.

Même en ayant critiqué, dans mon livre sur les coniques dans l'antiquité [1]), son analyse des plus grands écrivains de l'antiquité en fait de mathématiques, et essayé d'expliquer autrement le développement de leurs idées, la solidarité et avant tout la portée de ces mêmes idées, j'avoue hautement que sans le livre de M. Cantor il m'aurait été difficile de mener à bonne fin cette explication et qu'en tout cas, sans lui, j'aurais hésité plus longtemps à la publier. En effet, n'étant pas historien, et ayant originairement borné mes études aux auteurs où je pourrais espérer de trouver immédiatement des idées intéressantes au point de vue mathématique, je me serais exposé à les avoir interprétées faussement si, impartial dans l'exposition des faits qui corroborent ses propres opinions et de ceux qui ne les appuient pas, M. Cantor ne m'avait pas mis par son histoire en état de contrôler mes résultats par la considération des milieux où ces ouvrages ont paru et par l'étude des auteurs plus récents qui contribuent à les expliquer.

Dans le volume qui vient de paraître, on retrouve la même exactitude qui ne néglige rien et la même impartialité. L'impartialité de l'auteur s'étend à un domaine où elle est trop peu générale, même dans les histoires des sciences. M. Cantor reconnaît également les mérites des contributions des différentes nations. A cette impartialité il en ajoute une autre: celle de s'intéresser presque également aux bons et aux mauvais auteurs. Aussi cette dernière forme de son impartialité contribue-t-elle à rendre son livre très utile. La marche de la civilisation est caractérisée, non seulement par les progrès de la science humaine, mais aussi par ses décadences, et certaines méprises mathématiques peuvent être aussi instructives que beaucoup de découvertes justes. Même celui qui cherche avant tout le développement des idées fertiles qui ont créé successivement les mathématiques que nous possédons aujourd'hui, a besoin de

[1]) *Keglesnitslæren i Oldtiden*, Vid. Selsk. Skr., naturv.-math. Afd., 6te Række, III, 1. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*; Kopenhagen 1886.

connaître aussi les époques stériles, pour ne laisser échapper aucun des éléments qui aient contribué aux progrès. Si alors quelqu'un regrette qu'en même temps le livre de M. Cantor ne lui découvre pas toujours assez la grandeur des idées des coryphées en mathématiques, il doit se dire que c'est une conséquence de la loi sur la division du travail, et cela ne doit pas amoindrir sa reconnaissance envers le savant sagace et soigneux qui durant une vie laborieuse s'est appliqué à créer et établir si complètement l'historique des faits nécessaires à connaître pour bien apprécier cette grandeur. Mes remarques à cet égard ont donc pour seul but de signaler des questions de l'histoire des mathématiques, qui attendent encore leurs réponses.

Il y a une liaison intime entre les *desiderata* que suscite la lecture des deux volumes parus du livre de M. Cantor. Il me semble que l'auteur évalue trop les mérites des méthodes d'après leur ressemblance plus ou moins grande avec celles de notre temps, et les résultats d'après leur importance actuelle et d'après le travail nécessaire pour les établir par les parties des méthodes actuelles qu'on connaissait alors. Plus cette taxation est défavorable pour les méthodes dont les buts ont assez souvent différé de ceux qu'on se pose aujourd'hui, plus elle rend les résultats merveilleux; mais l'admiration exagérée des résultats qui en est la conséquence, ne donne pas même aux auteurs ce qu'on leur doit. Il est vrai qu'on ne comprend les procédés et les raisonnements des penseurs des temps passés que par leur concordance essentielle avec ceux qui sont à notre disposition aujourd'hui. Les conditions nécessaires pour bien établir un résultat mathématique, ont une réalité objective qui assure l'existence de cette concordance. Pour la retrouver dans ses formes très différentes, il s'agit moins de chercher dans le passé les similitudes extérieures avec les méthodes prêtes de notre temps, que d'examiner par quels procédés et par quelles considérations on les remplaçait autrefois, souvent pour exprimer dans le langage géométrique les mêmes pensées qui nous conduisent au même but, mais que nous exprimons par le langage de l'algèbre moderne. Avant tout il faut reconnaître, dans l'étude de tout grand géomètre d'un temps passé, les applications qu'il fait de méthodes n'existant pas alors et souvent attribuées avec raison à quelque auteur beaucoup moins ancien. C'est en effet une loi fondamentale dans l'histoire des mathématiques, et probablement dans celle de toute autre science, que l'invention d'une méthode, c'est-à-dire une révélation formelle de son utilité qui la met à la disposition de tout savant expérimenté, est toujours précédée par des applications qu'ont faites, et l'auteur même, et ordinairement plusieurs de ses prédécesseurs. L'histoire de l'invention des méthodes, en d'autres termes, l'histoire de l'évolution des mathématiques, est donc l'histoire de ces applications préalables.

Dans son excellente et complète analyse des faits de l'histoire des mathématiques de la Renaissance et du commencement de l'âge moderne, M. Cantor ne néglige pas de rendre compte d'une partie de ces applications préalables. Leur forme étant plus semblable que dans l'antiquité à celle dont on se sert à présent pour exprimer les applications des mêmes méthodes, les susdites applications appartiennent en partie aux faits historiques. En même temps la connaissance plus complète que nous procure son livre, fait surgir de nouvelles questions de cette nature.

Ce qui, selon moi, laisse plus immédiatement quelque chose à désirer, c'est son analyse des rapports des mathématiques plus modernes avec celles de l'antiquité. On regrette de ne voir pas toujours la connexion des méthodes de la Renaissance ou de l'âge moderne avec les applications qu'on en avait déjà faites dans l'antiquité.

Qu'on n'objecte pas que la connaissance des auteurs de l'antiquité est plus grande à présent qu'elle n'était, il y a trois ou quatre siècles, et qu'il était alors plus difficile de les comprendre qu'après les grands progrès faits depuis par les mathématiques. Cette dernière circonstance ajoute certainement beaucoup aux mérites des grands hommes qui ont repris, sous de nouvelles formes, les applications de procédés en usage dans l'antiquité; mais en même temps elle leur a rendu nécessaire d'approfondir beaucoup plus les pensées des auteurs antiques pour entrer en pleine possession des résultats conservés, auxquels il existe à présent d'autres chemins faciles et commodes. Pour cette raison, toutes les fois que je retrouve, dans les travaux de ces élèves immédiats des géomètres antiques, les mêmes explications que j'ai données dans mon livre sur la théorie des coniques dans l'antiquité, et des applications, souvent sans conscience d'aucune imitation, de méthodes que j'ai attribuées aux savants grecs, j'y vois la meilleure confirmation de la justesse des points de vue que j'ai soutenus dans ce livre.

Peut-être trouvera-t-on que les notes qui vont suivre, sont trop insignifiantes pour justifier cette mention de *desiderata* dans une œuvre dont je ne prends pas assez le temps de démontrer suffisamment les grands mérites. A quoi je répondrai que je regarde aussi comme un mérite du livre de M. Cantor de susciter, directement ou indirectement, la pensée de ces *desiderata*. Je souhaiterais que des géomètres de différentes spécialités essayassent de contribuer aussi à combler les lacunes. Partageant alors mon opinion ils sentiront combien l'histoire, telle qu'elle est, de M. Cantor, leur devient indispensable pour conduire à bonne fin cette tâche.

Espérons donc qu'il sera donné à M. Cantor d'achever d'après son propre plan sa grande histoire des Mathématiques.

I. Sur la résolution numérique d'une équation du 3e degré par Léonard de Pise.

Léonard de Pise[1]), dont les travaux datent du commencement du XIIIe siècle, était un géomètre d'un très haut rang à une époque où les mathématiques ne faisaient que commencer de pénétrer dans l'Europe occidentale.

On sait que les progrès de la géométrie grecque avaient été arrêtés par la domination romaine, et que les conquérants n'avaient appris qu'extrêmement peu de cette science. Elle ne faisait donc pas partie de la civilisation que pouvaient s'approprier les nouveaux peuples en voie de surgir des débris de l'empire romain occidental. En envahissant l'Égypte et, par conséquent, Alexandrie et d'autres sièges de la science grecque, les Arabes trouvèrent, quant aux mathématiques, un meilleur lot. Il est vrai que, depuis beaucoup de siècles, la géométrie avait cessé de se développer; elle existait du moins dans les chefs-d'œuvre conservés alors en plus grand nombre que nous n'en possédons à présent, et il y avait des hommes qui les étudiaient assez bien pour en comprendre au moins le détail, malgré l'absence des connaissances d'ensemble indispensables à la continuation de ce travail. L'extinction de ces connaissances remontait à si loin, que c'était tâche difficile de les raviver. Les Arabes n'y ont réussi que peu à peu en en reproduisant une grande partie, sous l'influence perpétuelle des auteurs grecs, et sous une forme nouvelle se prêtant mieux aux calculs et moins géométrique que celle des œuvres grecques antérieures à l'ère chrétienne. L'influence indienne contribua essentiellement à cette refonte, en apportant avant tout aux Arabes le nouveau calcul numérique basé sur le principe de position, c'est-à-dire sur le système dont nous nous servons aujourd'hui pour écrire les nombres et exécuter les calculs numériques.

---

[1]) Cantor, vol. II, p. 1—48.

Au temps de Léonard ce calcul, les premiers éléments de l'algèbre arabe et quelque peu de connaissance de la géométrie grecque avaient commencé à pénétrer très lentement en Europe. Cette suggestion successive se continua ensuite lentement pendant les trois siècles qui restaient du moyen âge et qui précèdent la nouvelle série de progrès notables faits en mathématiques.

Seulement Leonard de Pise sait déjà appliquer le nouveau calcul numérique et les méthodes de l'algèbre aussi bien et aussi facilement que les meilleurs mathématiciens de la fin du moyen âge.

Ce fait ne s'explique que par la coopération de deux causes différentes. L'une est qu'il était lui-même un élève immédiat des Arabes. Nous ne savons pas si l'influence de la science arabe en Sicile, que Léonard, comme nous allons le voir, a rencontrée à la cour impériale, avait commencé déjà dans sa jeunesse de pénétrer dans l'Italie du Nord; mais il nous raconte lui-même que les relations commerciales de sa ville natale l'avaient conduit en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile et en Provence, et que partout il s'était empressé d'apprendre tout ce qui appartient au calcul. Qu'il y ait réussi, au point de surpasser tous les Arabes de son temps, et qu'il ait su s'assimiler en différents lieux toutes ces connaissances que ses successeurs en Europe ne surent pas s'approprier par la lecture de ses excellents écrits, ce sont là des faits que seul peut expliquer son génie pour les mathématiques. Il semble avoir possédé un flair spécial pour les nombres, ce sens que ne possède qu'un nombre restreint des géomètres et qui parfois met des personnes peu familiarisées avec les mathématiques à même de faire des tours de force en fait de calcul.

Lorsque Léonard fut présenté à l'empereur Frédéric II, le *magister* Jean de Palerme, philosophe au service de ce monarque intéressé aux progrès scientifiques, lui proposa une série de questions, et leur solution mit dans le meilleur jour la supériorité de notre géomètre. On ne connaît pas la part que le philosophe de la cour impériale a eue à la composition de ces problèmes, et jusqu'à quel point il en a connu les solutions. Les devait-il à des mathématiciens arabes de Sicile, ou bien a-t-il été inspiré par Léonard lui-même? En tout cas, ce dernier ne partage avec aucun autre l'honneur de les avoir résolus si complètement.

La solution de ces problèmes révéla avant tout en Léonard ce sens des nombres dont je viens de parler, et même sous différentes faces. Une des questions était relative à la théorie des nombres proprement dite: il en démêla les difficultés d'une manière beaucoup plus complète que ne l'avaient fait les auteurs arabes qui s'en étaient occupés. Celle qui va être mentionnée ici, fut résolue par lui avec une exactitude numérique qui demanderait aujourd'hui un calcul long et pénible.

Trois cents ans avant l'invention de la résolution formelle des équations cubiques et des premières règles servant à la résolution numérique d'équations numériques, il trouva que l'équation

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

a pour racine, exprimée par des fractions sexagésimales,

$$x = 1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI},$$

où seul le nombre des dernières unités sexagésimales, ou bien des fractions ayant pour dénominateur 60^6, est arrondi un peu (d'environ $38^1/_2$ à 40).

Dans le compte rendu de sa résolution, Léonard commence par montrer l'impossibilité de résoudre l'équation par un nombre rationnel ou par les quantités irrationnelles définies dans le 10e livre d'Euclide. Il a eu lieu ainsi de montrer sa claire intelligence de ce livre difficile et la profondeur de ses connaissances théoriques. Ayant démontré l'impossibilité d'exprimer la racine par des fonctions connues — comme nous dirions aujourd'hui — il se résout assez logiquement à un calcul approximatif direct («*studui solutionem ejus ad propinquitatem redu-*

cere»). Il a trouvé ainsi le résultat que nous venons de citer; mais il ne dit pas comment il l'a trouvé.

Le grand intérêt qu'aurait la connaissance des procédés qui y ont conduit, a sans doute porté plusieurs géomètres à essayer de refaire le calcul par une voie accessible à Léonard. M. Cantor cite [1]) deux de ces essais que, du reste, il soumet à une critique injuste d'après moi. Le premier, celui de Hankel [2]), n'est pas même un essai proprement dit. Hankel se borne à mettre en parallèle l'approximation de Léonard et celle dont se servit deux siècles plus tard un mathématicien arabe et dont nous connaissons le détail. M. Cantor objecte à ce parallèle que l'équation de Léonard ne présente pas les propriétés dont dépend le procédé d'approximation du mathématicien arabe. Or, la plus essentielle de ces propriétés dépend de la circonstance que la racine cherchée est très petite. Il est vrai que la racine cherchée par Léonard ne satisfait pas à cette condition, étant renfermée entre 1 et 2, ce qu'il avait trouvé par son essai d'y attribuer une valeur entière; mais les corrections par lesquelles il a poussé son approximation de plus en plus loin, auront été de petites racines d'équations algébriques. Ces équations ont très bien pu présenter aussi la même forme extérieure que celle de l'auteur arabe (équation cubique sans terme quadratique).

L'autre essai, qui est dû à Genocchi, ne m'est connu que par la mention qu'en fait M. Cantor [3]). Genocchi suppose que Léonard ait trouvé son résultat par le même procédé que, plus de trois siècles après, Cardan a publié sous le nom de *Regula aurea*; mais M. Cantor déclare formellement que

---

[1]) II, p. 44 et 465.

[2]) *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* p. 293.

[3]) T. II, p. 44 et p. 465. Le mémoire de Genocchi se trouve dans le t. VI des *Annali di scienze matematiche e fisiche de Tortolini.* La Bibliothèque Royale de Copenhague ne possède que les *Annali di Matematica,* qui font suite à la publication citée.

cette supposition ne s'appuie sur rien du tout («*nicht die geringste Stütze besitzt*»). Or, ce qui est commun aux applications, assez différentes entre elles, que Cardan fait de sa règle, c'est qu'il commence par deux valeurs approchées, l'une trop grande, l'autre trop petite, et qu'il se procure ensuite par des applications successives de l'ancienne règle de deux *fausses positions*, c'est-à-dire par des interpolations successives entre deux valeurs approchées, de nouvelles valeurs de plus en plus exactes. Sachant, comme on le verra, que Léonard a fait d'autres applications de ce même procédé, nous ne pouvons nous ranger à l'avis de M. Cantor.

Cependant, avant de juger des essais qu'on a faits de restituer la résolution de Léonard ou d'en faire de nouveaux, il faut préciser, plus que ne l'a fait M. Cantor, les conditions qu'on peut exiger à une telle restitution. Il est fort peu probable que Léonard ait été en possession d'une méthode prête donnant à quiconque sait calculer, une formule intelligible pour résoudre numériquement les équations numériques, et même qu'il en ait inventé une avant d'aborder l'équation en question. Des essais lui avaient montré que la racine cherchée doit se trouver entre 1 et 2. N'ayant aucune méthode directe, il a été renvoyé à de nouveaux essais pour trouver des limites plus étroites. Dans ces essais, il a pris pour guide sa propre intelligence de la question, et son sens des nombres lui a fait mettre à profit certaines voies abrégées, rendues possibles par les valeurs particulières des coefficients. Pour constater l'individualité de Léonard en fait de mathématiques, il serait fort intéressant de connaître ces voies particulières; mais, préalablement du moins, l'histoire des mathématiques doit demander une réponse positive à ces questions: 1° de quelles voies savons-nous qu'il a disposé? et 2° a-t-il été possible à un calculateur du rang de Léonard d'achever une approximation si fine par un choix convenable de ces voies, et sans un calcul trop énorme?

Une circonstance particulière facilite la réponse à la première de ces questions. Léonard, qui nous communique dans sa grande œuvre *Liber abaci* les extractions des racines carrées et des racines cubiques, en regarde la première comme connue, mais se vante d'avoir inventé les procédés dont il se sert pour la dernière. Il est vrai que même en Europe on savait extraire des racines cubiques à son époque; mais il n'y a pas de raison de croire qu'il ait connu ces extractions et passé sous silence cette connaissance. Au contraire, l'extraction des racines cubiques ressemble assez à celle des racines carrées pour expliquer comment un homme du talent de Léonard, connaissant ladite extraction de racine carrée, a su en déduire une méthode pour l'autre racine. Il ne s'agissait que de substituer l'expression de $(a+b)^3$ à $(a+b)^2$.

Une extension non moins simple que celle qui conduit de l'extraction ordinaire des racines carrées à celle des racines cubiques, conduira de celle-ci à la méthode d'approximation qui porte le nom de Newton, mais que déjà Viète et plusieurs de ses contemporains savaient employer en procédant tout à fait systématiquement.

Appliquée à l'équation de Léonard, dans laquelle nous remplacerons préalablement le second membre par la valeur générale k, et que nous écrivons

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x = k,$$

cette méthode conduit à déterminer la correction b d'une valeur approchée a.

On substitue $x = a + b$ dans l'équation, qui prend alors, par la seule application des valeurs de $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$, la forme

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + f'(a) \,.\, b + \ldots \\ &= a^3 + 2a^2 + 10a + (3a^2 + 4a + 10)\, b + \ldots = k. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur approchée de la correction b:

$$b = \frac{k - f(a)}{f'(a)} = \frac{k - (a^3 + 2a^2 + 10a)}{3a^2 + 4a + 10}.$$

Viète applique ce procédé à la détermination successive des différents chiffres de la racine. Dans le cas actuel, où tous les termes du premier membre sont positifs, il est certain que le chiffre déterminé ainsi ne devient pas trop petit. La continuation du calcul montrera s'il est trop grand, et alors on trouvera par des essais faciles s'il faut le réduire d'une ou de plusieurs unités.

On voit que la méthode est essentiellement identique à celle que nous employons pour déterminer successivement les chiffres d'une racine carrée ou cubique. C'est la même qu'y appliquait Léonard; il dit qu'il faut déterminer le chiffre cherché de l'approximation à b, qui, dans l'extraction des racines cubiques, dépend lui-même d'une équation du second degré, «*ex usitato arbitrio*». Si l'on ne savait pas que la méthode de Viète s'est fait attendre pendant plus de trois siècles encore, on croirait que quiconque a appris le procédé des extractions de racines serait en état de l'appliquer aussi à la recherche des racines d'équations algébriques. Léonard ne l'avait apprise que pour les racines carrées: pour les racines cubiques il l'avait inventée. N'en serait-il donc pas assez maître pour l'étendre aussi jusqu'au traitement de l'équation qui lui était proposée et où le besoin lui fournissait l'occasion de cette extension?

Une seule chose pourrait l'en empêcher. Dans l'extraction des racines, l'application immédiate de la méthode en question ne sert qu'à déterminer les nombres d'unités décimales du nombre entier de la racine. Dans l'équation qui lui était proposée, il avait commencé par voir que ce nombre est égal à 1: il s'agissait donc de déterminer la partie fractionnaire de la racine. Or, les fractions décimales n'étaient nullement en usage à son époque; mais on possédait, depuis le temps des astronomes chaldéens, un moyen semblable: celui d'exprimer une fraction quelconque dans le système sexagésimal. En le faisant, Léonard substitue une suite d'unités de différents ordres à la fraction, et l'on peut très bien s'imaginer qu'il ait appliqué la méthode de Viète à la détermination successive des nombres de ces différentes unités.

Cependant, cette application directe des règles de «la méthode de Viète-Newton» n'était pas la seule qui fût à la disposition de Léonard. On trouvera d'autres formes de l'approximation successive dans sa détermination des fractions de racines carrées et cubiques, et il est au moins aussi facile d'étendre ces formes à la détermination de la racine de son équation.

Pour exprimer la racine carrée d'un nombre k plus exactement que par le nombre entier, a, Léonard commence par y ajouter, conformément au procédé dont nous venons de parler, la fraction $b = \frac{k - a^2}{2a}$. Le résultat étant alors devenu trop grand, il y applique une autre correction négative $c = \frac{b^2}{2(a+b)}$, qu'on tire de l'équation

$$k = (a + b - c)^2 ,$$

où nous savons déjà que $k = a^2 + 2ab$, en développant son second membre et en négligeant c^2.

Ce procédé que Léonard doit probablement à des auteurs arabes, quand même on ne le retrouve que plus tard dans la littérature arabe conservée [1]), montre déjà que les principes de l'approximation étaient assez familiers à notre calculateur; mais il est encore moins permis de douter de sa faculté d'employer librement la méthode qu'il a inventée ou du moins adaptée à la détermination approximative des racines cubiques. Elle a été d'autant plus à sa disposition, partout où il y en a besoin, qu'elle est conforme à une ancienne méthode dont il fait beaucoup d'applications d'une nature très différente. Dans ces dernières applications, la méthode en question s'appelle la règle de deux fausses positions.

---

[1]) Cantor I, p. 797.

La règle simple de fausse position a déjà été employée par les anciens Égyptiens [1]. Elle sert a résoudre, sans usage d'équations, les problèmes qui dépendraient d'une équation de la forme

$$ax = b.$$

Si l'on essaie d'attribuer à x la valeur de x_0, mais qu'on trouve alors, au lieu de la valeur donnée de b, une valeur b_0, la valeur exacte sera égale à $\frac{bx_0}{b_0}$.

La règle de deux fausses positions s'applique aux cas où l'équation aurait la forme

$$ax + b = c.$$

Si l'on trouve alors par des essais que

$$ax_0 + b = c_0$$
$$ax_1 + b = c_1,$$

on a évidemment

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{c - c_0}{c_1 - c_0},$$

ce qui conduit à une règle facile pour le calcul de x. Les auteurs arabes auxquels nous devons les premières mentions de cette règle, l'attribuent aux Indiens [2]. Dans son *Liber Abaci*, Léonard de Pise démontre la règle par la proportion indiquée, qu'il représente géométriquement, à l'instar des anciens, et il l'applique avec prédilection à beaucoup d'exemples de calcul.

Bien entendu, la règle ne sert pas à résoudre l'équation simple que nous venons d'écrire ici — ce qui serait aussi simple que le calcul par la proportion — mais à éviter de mettre le problème en équation, et elle a été employée dans des temps où ce procédé analytique était inconnue. Alors il s'agissait de reconnaître par un certain tact si la règle était bien applicable à une question proposée. Léonard, qui connais-

[1]) Cantor I, p. 36.
[2]) Cantor I, p. 627.

sait la démonstration de la règle, n'était pas exposé à se tromper à cet égard. Il ne croyait donc pas rigoureuse l'application de ladite règle à des cas où la quantité c ne deviendrait pas une fonction linéaire d'x.

Néanmoins nous voyons Léonard appliquer aussi la règle à déterminer de nouvelles approximations d'une racine cubique qui est déjà renfermée entre deux valeurs approchées[1]). Ces applications sont fort bonnes; car les procédés prescrits par la règle de deux fausses positions sont absolument identiques à ce que nous appelons aujourd'hui interpolation simple, et Léonard ne les applique qu'à des cas où les deux approximations qu'il possède déjà, sont suffisantes pour permettre l'usage d'une interpolation.

Dans l'extraction des racines cubiques, Léonard se sert de deux applications successives de cette règle pour en trouver la partie fractionnaire. Si, ayant déjà trouvé les entiers de $\sqrt[3]{k}$, l'on sait que

$$a < \sqrt[3]{k} < a + 1,$$

la première application de la règle à l'équation $x^3 = k$ conduira à poser $x = a + \frac{k - a^3}{3a(a+1)+1}$.

M. Cantor indique cette première approximation[2]) en rappelant qu'il imite ainsi une approximation des racines carrées de l'Arabe Alkarchî. Si Léonard s'était contenté de cette approximation, il resterait encore possible qu'il n'ait pas observé l'identité de son procédé avec une application de la règle en question; mais son approximation suivante, que M. Cantor ne mentionne pas, ne laisse plus aucun doute qu'il connaît cette identité. Considérons un de ses exemples. Ayant trouvé $3 < \sqrt[3]{47} < 4$, la première interpolation le conduit à la valeur de $3 + \frac{20}{37}$, qu'il arrondit à $3\frac{1}{2}$. Ayant vu que

---

[1]) *Scritti di Leonardo Pisano pubblicati di Boncompagni* vol. I, p. 380—81.

[2]) Cantor II, p. 29.

$$(3\tfrac{1}{2})^3 < 47 < 4\,,$$

il trouve pour nouvelle valeur approchée de $\sqrt{47}$

$$3 + \tfrac{1}{2} + \frac{4\frac{1}{8}}{3\,.\,3\frac{1}{2}\,.\,4}, \text{ arrondie à } 3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10} = 3\tfrac{3}{5}.$$

Le numérateur de la dernière correction est bien, conformément à la règle, la différence entre 47 et $(3\frac{1}{2})^3$, ce que Léonard dit expressément. Le dénominateur devrait être $4^3 - (3\frac{1}{2})^3$ divisé par la différence $\frac{1}{2}$ de 4 et de $3\frac{1}{2}$. Léonard doit avoir obtenu $3\,.\,3\frac{1}{2}\,.\,4$ en négligeant dans la différence

$$\begin{aligned} 4^3 - (3\tfrac{1}{2})^3 = (3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})^3 - (3\tfrac{1}{2})^3 &= 3\,.\,3\tfrac{1}{2}\,.\,(3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})\,.\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} \\ &= 3\,.\,3\tfrac{1}{2}\,.\,4\,.\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

le terme fractionnaire $\frac{1}{8}$. Léonard emploie la même réduction dans ses autres exemples. Il fait la remarque qu'on pourrait obtenir des approximations ultérieures par des répétitions du même procédé.

Il est évident qu'ayant appliqué ainsi la règle de deux fausses positions, ou l'interpolation simple, au calcul approximatif de racines cubiques, il serait aussi en état de l'appliquer à celui de la racine de son équation. Nous le voyons donc en possession des deux procédés dont, de nos jours aussi, on recommande la combinaison pour assurer l'efficacité d'une approximation [1]. L'admiration qu'excite l'exploit de Léonard, savoir le calcul en question, ne doit pas s'amoindrir par le fait que nous sommes ainsi en état de le comprendre. Nous voyons au contraire qu'en grande partie il s'est créé à lui-même les procédés qu'il a su employer d'une façon brillante en portant son approximation à un si haut degré.

Ne me croyant pas calculateur assez versé pour bien évaluer le mérite de cette finesse et pour voir par quelle combinaison des méthodes qui étaient à la disposition de Léonard, et par quel choix dans la multitude de formes que peut prendre un calcul fait d'après ces deux méthodes, il a pu réussir à

---

[1]) Voir Julius Petersen: *De algebraiske Ligningers Theori*, p. 235.

pousser si loin son approximation, j'ai proposé à mon collègue, M. Gram de s'occuper de cette question délicate. Il l'a saisie avec beaucoup d'intérêt, et, ne se bornant pas à me donner la réponse que j'espérais de lui sur les différentes voies par lesquelles il aurait été possible à Léonard de parvenir à son but, il a réussi à en retrouver celle que probablement il a suivie en réalité.

Ce résultat était inattendu pour moi, parce que la valeur trouvée par Léonard semble juste dans les limites qu'il s'est proposées, tandis qu'une faute aurait pu conduire sur les traces de son calcul. M. Gram a su s'y mettre en observant pourquoi le degré d'approximation n'est ni plus grand ni plus petit que celui du nombre qu'il communique, et en découvrant que ce que je n'ai regardé que comme un arrondissement est en réalité une petite inexactitude qui résulte de son procédé, et qui se décèlerait seulement par un essai de pousser ultérieurement l'approximation.

(A suivre.)